«پی» در تنگنای تعیین‌کننده!

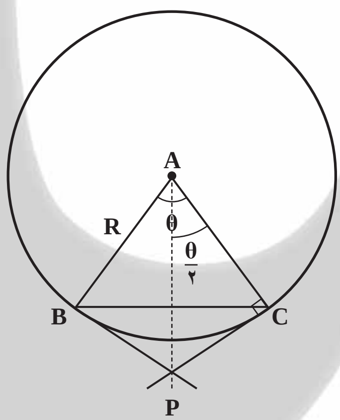
محمد طبیعی
دانشجوی مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی شریف

مقدمه

عدد پی (π) یک ثابت ریاضی است که از تقسیم محیط دایره بر قطر آن به‌دست می‌آید. یافتن مقدار دقیق این عدد، در طول تاریخ مورد توجه ریاضی‌دانان بسیاری بوده و هر یک از آن‌ها سعی داشته است تا تقریب دقیق‌تری از عدد پی را ارائه دهد. *غیاث‌الدین جمشید کاشانی*، ریاضی‌دان ایرانی قرن‌های هشتم و نهم، توانسته بود عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشار به درستی محاسبه کند. باید در نظر داشت که در آن دوران روش مناسبی برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی (همچون بسط تیلور و...) وجود نداشت و تنها راه، به‌کارگیری اتحادهای مثلثاتی بود.

در این مقاله قصد داریم با استفاده از مفاهیم مقدماتی روشی را برای به‌دست آوردن عدد π ارائه دهیم.

در گام اول یک مثلث متساوی‌الساقین حاده‌الزاویه رسم می‌کنیم (مانند ABC) که زاویهٔ رأس آن برابر θ (برحسب درجه) باشد. سپس به مرکز A و شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم. در نقاط B و C بر این دایره مماس‌هایی رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در P قطع کنند. روشن است که داریم:



مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ $\le$ مساحت قطاع ABC $\le$ مساحت چهارضلعی ABPC

اگر طول AB را برابر R بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{۱}{۲}R^{۲}\sin\theta$$

$$\text{مساحت قطاع } ABC = \frac{\theta}{۳۶۰}\pi R^{۲}$$

برای به‌دست آوردن مساحت ABPC نخست باید توجه داشت که دو مثلث ABP و ACP هم‌نهشت هستند.

پس:

$$\text{مساحت } APBC = ۲\times\frac{R\times R\tan\frac{\theta}{۲}}{۲} = R^{۲}\tan\frac{\theta}{۲}$$

و

$$\text{مساحت } ABPC = ۲\times\overset{\Delta}{APC}$$

در نتیجه با استفاده از نامساوی (۱) داریم:

$$\frac{۱}{۲}R^{۲}\sin\theta \le \frac{\theta}{۳۶۰}\pi R^{۲} \le R^{۲}\tan\frac{\theta}{۲}$$

از طرف دیگر می‌دانیم:

$$\tan\theta = \frac{۲\tan\frac{\theta}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{\theta}{۲}} \leftarrow \text{اگر } \theta \text{ حاده باشد}$$

$\tan\theta \ge ۲\tan\frac{\theta}{۲}$ با جای‌گذاری نامساوی اخیر در نامساوی بالا داریم:

$$\frac{۱}{۲}R^{۲}\sin\theta \le \frac{\theta}{۳۶۰}\pi R^{۲} \le \frac{۱}{۲}R^{۲}\tan\theta$$

با تقسیم طرفین بر $\frac{\theta}{۳۶۰}\times R^{۲}$ داریم:

$$\frac{۱۸۰}{\theta}\sin\theta \le \pi \le \frac{۱۸۰}{\theta}\tan\theta \quad (۲)$$

نامساوی بالا به ازای هر θ حاده برقرار است، بدیهی است که هرچه θ به صفر نزدیک‌تر باشد، کران بالا و پایین دقیق‌تری برای π به‌دست می‌آید. به‌همین سبب برای اینکه θ رشد سریعی به سمت صفر داشته باشد، می‌گیریم: $\theta=\frac{۱۸۰}{n^{۲}}$. پس:

$$۲^n \sin\frac{۱۸۰}{۲^n} \le \pi \le ۲^n \tan\frac{۱۸۰}{۲^n}$$

اکنون فرض کنید:

$b_n=\tan\frac{۱۸۰}{۲^n}$ و $a_n=\sin\frac{۱۸۰}{۲^n}$.

می‌دانیم: $\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲} x}$ [1]

در نتیجه:

$$\tan\frac{۱۸۰}{۲^n}=\frac{۲\tan\frac{۱۸۰}{۲^{n+۱}}}{۱-\tan^{۲}\frac{۱۸۰}{۲^{n+۱}}}$$

لذا: $b_n=\frac{۲b_{n+۱}}{۱-b^{۲}_{n+۱}} \leftarrow b^{۲}_{n+۱}b_n+۲b_{n+۱}-۱=۰ \leftarrow$

$$b_{n+۱}=\frac{\sqrt{b^{۲}_{n+۱}-۱}}{۲b_n} \quad (۳)$$

$n\ge ۲ \quad b_۲=۱$

از طرف دیگر می‌دانیم: $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ [2]

یا در صورت حاده بودن x: $\sin ۲x=۲\sin x\sqrt{۱-\sin^{۲} x}$

یعنی: $\sin\frac{۱۸۰}{۲^n}=۲\sin\frac{۱۸۰}{۲^{n+۱}}\sqrt{۱-\sin^{۲}\frac{۱۸۰}{۲^{n+۱}}}$.

لذا: $a_n=۲a_{n+۱}\sqrt{۱-a^{۲}_{n+۱}}$

پس:

$$a_{n+۱}=\sqrt{\frac{-\sqrt{۱-a_n^{۲}}+۱}{۲}},\ n\ge ۲ \quad \text{و} \quad a_۲=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad (۴)$$

توجه کنید که عبارت‌های (۳) و (۴) با فرض مثبت‌بودن b_iها و a_iها به‌دست آمده‌اند.

اکنون به‌طور خلاصه داریم:

$$۲^n a_n \le \pi \le ۲^n b_n$$

$n\ge ۲ \qquad n\ge ۲$

که b_n از دنبالهٔ بازگشتی $b_{n+۱}=\frac{\sqrt{b^{۲}_{n+۱}-۱}}{b_n}$ و $b_۲=۱$ پیروی می‌کند و a_n از دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+۱}=\sqrt{\frac{-\sqrt{۱+a_n^{۲}}+۱}{۲}}$ و $a_۲=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ به‌دست می‌آید.

اکنون اگر تا $b_{۱۲}$ و $a_{۱۲}$ پیش برویم، داریم:

$$۲^{۱۲}a_{۱۲}\le\pi\le ۳/۱۴۱۵۹۳۲$$

$$۳/۱۴۱۵۹۲۳\le\pi\le ۳/۱۴۱۵۹۳۲$$

لذا می‌توان دریافت که π تا ۵ رقم اعشار عبارت است از: ...۳/۱۴۱۵۹ با این اوصاف هنوز ۱۱ رقم از **پیر کاشان** عقب‌تریم!

توجه کنید که می‌توان با افزایش n و همچنین افزایش دقت ارقام اعشاری در هر مرحله از استفاده از روابط بازگشتی، به تقریب‌های بسیار دقیق‌تر هم دست یافت.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دان ایرانی قرن‌های هشتم و نهم، توانسته بود عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشار به‌درستی محاسبه کند

پی‌نوشت

۱ و ۲. توجه کنید که این اتحاد اثبات‌های مقدماتی و هندسی فراوانی دارد که به برخی از آن‌ها در «مجلهٔ برهان» اشاره شده است.

منابع

۱. دانشنامهٔ آزاد ویکی‌پدیا «عدد پی».
۲. وب‌سایت کانون فرهنگی آموزش، «غیاث‌الدین جمشید کاشانی».